YANIT ANAHTARI

1) a) $f(2)=4 \Rightarrow f^{-1}(4)=2, \quad f'(2)=\frac{1}{3}$

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{1/3}=3$$

b) $f(x)=\frac{x^4}{x+1}, \quad x=1, \ \Delta x=-0{,}1$ alınırsa

$$f'(x)=\frac{4x^3(x+1)-x^4}{(x+1)^2}=\frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}, \quad f'(1)=\frac{7}{4}, \quad f(1)=\frac{1}{2}$$

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$f(0{,}9)=\frac{(0{,}9)^4}{0{,}9+1}\approx f(1)+f'(1)\cdot\Delta x=\frac{1}{2}+\frac{7}{4}(0{,}1)=\frac{13}{40}=0{,}325$$

2) f fonksiyonu $\mathbb{R}-\{-2\}$ de tanımlı olduğundan $[1,4]$ aralığında iyi tanımlıdır ve süreklidir. Ayrıca f fonksiyonu $(1,4)$ aralığında türevlenebilirdir. O halde Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

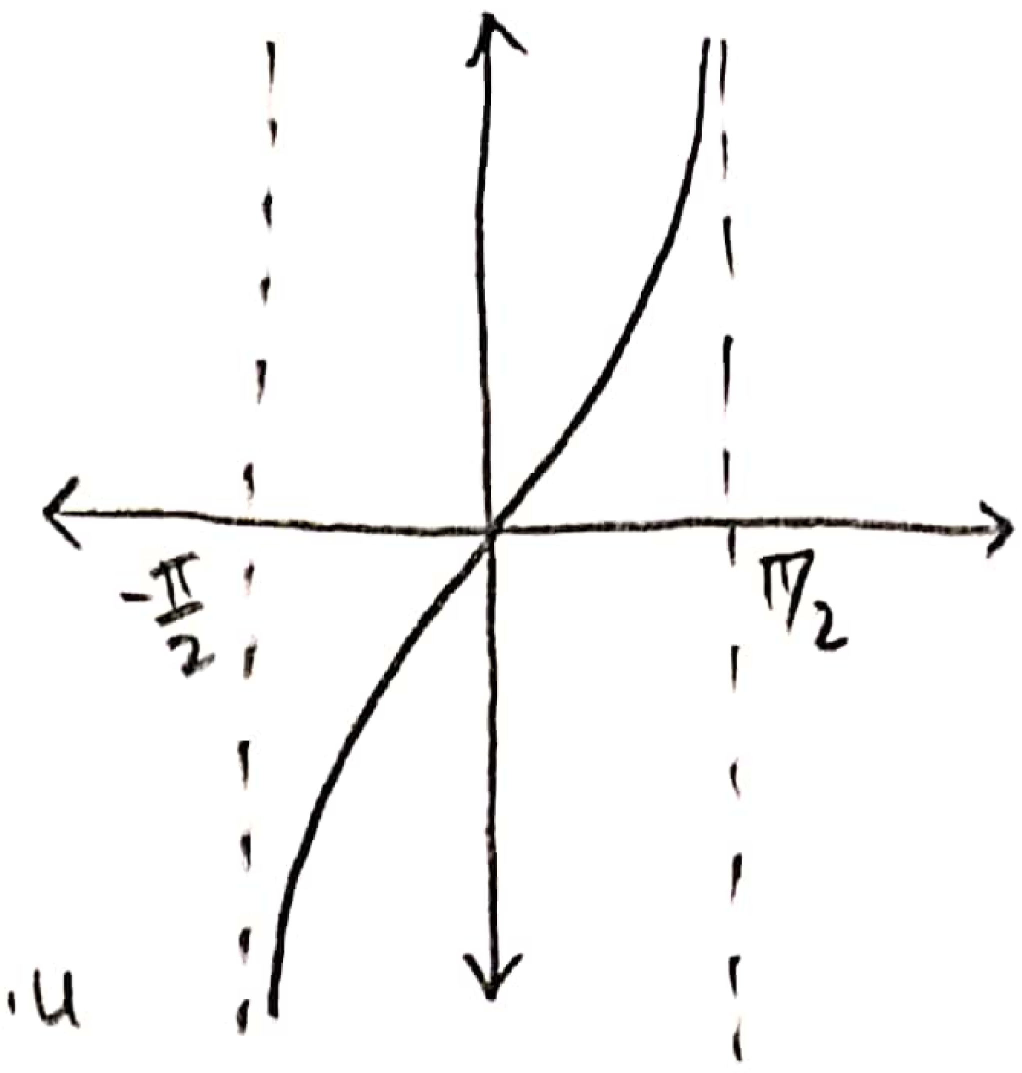
$$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 1-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{2}{(c+2)^2}=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow (c+2)^2=18 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1=3\sqrt{2}-2\in(1,4) \\ c_2=-3\sqrt{2}-2\notin(1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1=3\sqrt{2}-2 \text{ olmalıdır.}$$

(3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi} = [\infty^0]$



belirsizliği olup bu limite K denilirse

$K = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x)^{2x-\pi} \Rightarrow$ ln fonk.u sürekli olduğundan

$\ln K = \ln\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x^{(2x-\pi)}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2x-\pi) . \ln(\tan x)$

$= [0 . \infty] = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} = \left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right) \Rightarrow$ L'Hospital

ile $\ln K = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\frac{1}{\tan x} . \sec^2 x}{\frac{-1}{(2x-\pi)^2}}$

$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{1}{\sin x . \cos x} . \dfrac{(2x-\pi)^2}{-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{2(2x-\pi) . 2}{-[\cos^2 x - \sin^2 x]} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{4(2x-\pi)}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

$= \dfrac{0}{1} = 0$ olur. $\ln K = 0 \Rightarrow K = e^0 = 1$ dir.

④ $f(x) = 2^{\frac{-1}{x^2-1}}$ için

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ dir. $f(-x) = f(x)$ old.dan bir çift fonksiyon (y-eks. simetrik) olur. Periyodik olmayıp $A(0,2)$ noktasından geçer.

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} 2^{-\frac{1}{x^2-1}} = 2^{\frac{-1}{0^+}} = 2^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2^{\frac{-1}{x^2-1}} = 2^{\frac{-1}{0^-}} = 2^{+\infty} = \infty$

$x = 1$ doğrusu soldan düş. asimtot olur.

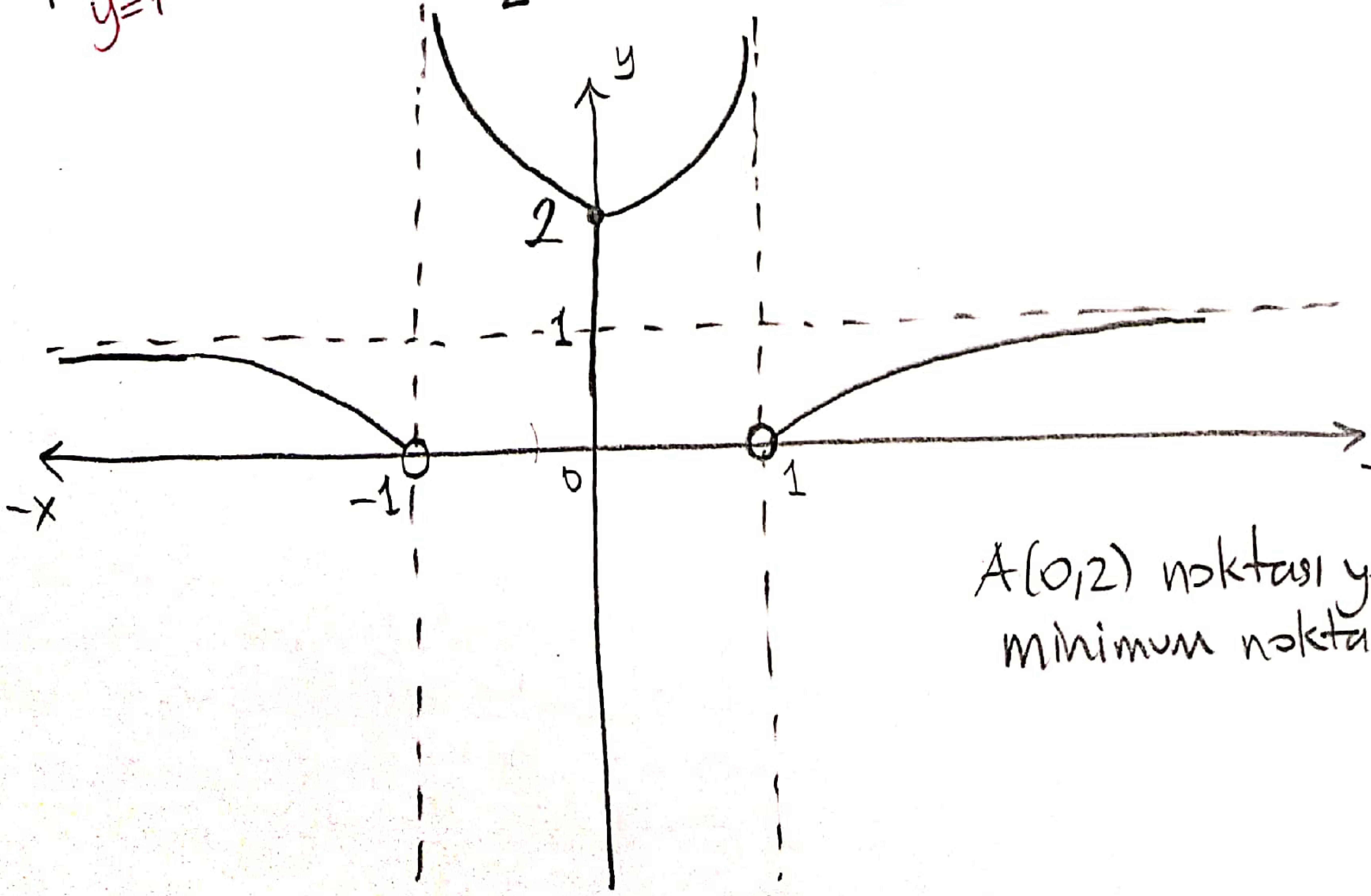
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{-1}{x^2-1}} = 2^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-\frac{1}{x^2-1}} = 1$

$y = 1$ doğrusu $\mp\infty$ kollarda yatay asimtottur.

3) $f'(x) = 2^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ olup $x = 0, x = \mp 1$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$y=1$	↘	‖	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	$y=1$



A(0,2) noktası yerel minimum noktasıdır.

(5a) $\begin{cases} x(t) = t^3+3t \\ y(t) = t.\arctan t - \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ için

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\arctan t + t.\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}.2t}{3t^2+3}$$

$$= \frac{\arctan t}{3t^2+3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{(y'_t)'}{(x_t)'} = \frac{\left[\frac{\arctan t}{3t^2+3}\right]'}{3t^2+3}$$

$$= \frac{1-2t.\arctan t}{9(t^2+1)^3}$$ olur.

(5b)

$f(x) = (x^2+1)^{\sqrt{\tan\sqrt{x}}}$ -in türevini logaritmik türev alma yöntemi ile bulursak

$$\ln f(x) = \sqrt{\tan\sqrt{x}}.\ln(x^2+1) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}(\tan\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}.\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\ln(x^2+1) + \sqrt{\tan\sqrt{x}}.\frac{2x}{x^2+1}$$

den

$$f'(x) = f(x).\left[\frac{\sec^2\sqrt{x}.\ln(x^2+1)}{4\sqrt{x.\tan\sqrt{x}}} + \frac{2x\sqrt{\tan\sqrt{x}}}{x^2+1}\right]$$

bulunur.